Coordenadas Polares

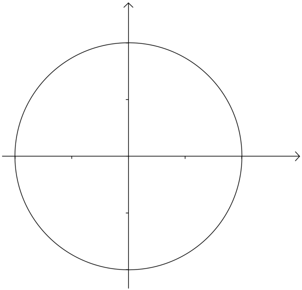
Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

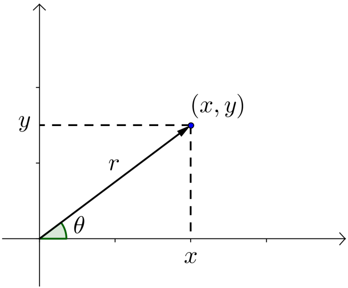
11 de maio de 2020

Regiões de integração circulares

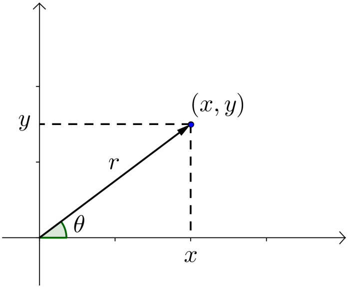
Supondo regiões circulares, pode-se utilizar coordenadas polares para facilitar a resolução de uma integral dupla.



Mudança de coordenadas retangulares para polares



Mudança de coordenadas retangulares para polares



$$\begin{cases} sen(\theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow \quad y = r sen(\theta) \\ cos(\theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow \quad x = r cos(\theta) \\ x^2 + y^2 = r^2 sen^2(\theta) + r^2 cos^2(\theta) = r^2(sen^2(\theta) + cos^2(\theta)) = r^2 \end{cases}$$

Se $f(x,y)$ é contínua na região definida por $0 \leq a \leq r \leq b$ e $\alpha \leq \theta \leq \beta$, então

$$\int\int_R f(x,y)dR = \int_{\alpha}^{\beta}\int_a^b f(rcos(\theta), rsen(\theta))rdrd\theta$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral

$$\int\int_R \sqrt{x^2+y^2}dR,$$

em que R é a região determinada por $y \geq 0$ e limitada pelas circunferências de raio 2 e 3.

Exemplo:

Calcule a seguinte integral

$$\int\int_R \sqrt{x^2+y^2}dR,$$

em que R é a região determinada por $y \geq 0$ e limitada pelas circunferências de raio 2 e 3.

Como estamos sob a condição de $y \geq 0$, então é apenas tomado meia circunferência. Assim, a região é delimitada por $2 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \pi$.

Exemplo:

Calcule a seguinte integral

$$\int\int_R \sqrt{x^2+y^2}dR,$$

em que R é a região determinada por $y \geq 0$ e limitada pelas circunferências de raio 2 e 3.

Como estamos sob a condição de $y \geq 0$, então é apenas tomado meia circunferência. Assim, a região é delimitada por $2 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\int\int_R \sqrt{x^2+y^2}dR = \int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{(rcos(\theta))^2+(rsen(\theta))^2}rdrd\theta$$

Exemplo:

$$\int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)}rdrd\theta \quad =$$

Exemplo:

$$\int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2 cos^2(\theta) + r^2 sen^2(\theta)}\, r dr d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2}\, r dr d\theta$$

Exemplo:

$$\int_0^\pi \int_2^3 \sqrt{r^2 cos^2(\theta) + r^2 sen^2(\theta)} r dr d\theta = \int_0^\pi \int_2^3 \sqrt{r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^\pi \int_2^3 r^2 dr d\theta$$

Exemplo:

$$\int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)}\,rdrd\theta = \int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2}\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_2^3 r^2drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_2^3 d\theta$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)}rdrd\theta &= \int_0^{\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2}rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_2^3 r^2drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_2^3 d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{27}{3}-\frac{8}{3}d\theta
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_2^{3}\sqrt{r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)}rdrd\theta &= \int_0^{\pi}\int_2^{3}\sqrt{r^2}rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_2^{3} r^2drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3}\bigg|_2^3 d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{27}{3}-\frac{8}{3}d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{19}{3}d\theta
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_2^{3}\sqrt{r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)}rdrd\theta &= \int_0^{\pi}\int_2^{3}\sqrt{r^2}rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_2^{3} r^2 drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_2^3 d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{27}{3}-\frac{8}{3}d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{19}{3}d\theta \\
&= \frac{19}{3}\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{19}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Exercícios propostos

Exercícios 12 - 14, página 85 da apostila da Unip

- Os exercícios em preto são para praticar.
- Os exercícios em vermelho são para entregar.

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`